

### MAI 1 – domácí úkol (ze cvičení) 10.

1. Vypočítejte následující limity funkce, nebo ukažte, že funkce limitu a daném bodě nemají :

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$  ;    b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$  ;
- c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) \cdot (\log(n^2 - 4) - 2 \log n)$  nebo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ );  
(návod: užití Heineho větu)

2. a) Ve cvičení 9. jsme ukázali, že funkce  $f$ , definovaná

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \quad \text{pro } |x| < 1, \quad f(x) = 0 \quad \text{pro } |x| \geq 1,$$

je spojitá v  $\mathbb{R}$ . Ukažte, že i její derivace  $f'$  je spojitá v  $\mathbb{R}$ .

nebo

b) Funkce  $f$  je definována:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}, \quad \text{pokud } x \neq 0 \quad \text{a} \quad f(0) = 0.$$

Ukažte, že  $f$  je spojitá v  $\mathbb{R}$  a dále zjistěte, pro která  $x \in \mathbb{R}$  existuje derivace, případně jednostranné derivace  $f'_+(x)$  nebo  $f'_-(x)$ . Tyto derivace spočítejte.

nebo

c) Zkuste spočítat derivace ve „špatných“ bodech z  $D_f$

$$(i) \quad f(x) = \sqrt{\arctg(x-1)^2} \quad \text{nebo} \quad (ii) \quad f(x) = \cos \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}.$$

3. Zkuste vyšetřit průběh aspoň jedné z funkcí:

$$a) \quad f(x) = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^2; \quad b) \quad f(x) = \frac{|2x-1|}{(x-1)^2}; \quad c) \quad f(x) = \arctg \left( \frac{x-1}{x+1} \right); \quad d) \quad (x-2) \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Návod:

Najděte její definiční obor, vyšetřete, zda funkce je lichá nebo sudá, najděte průsečíky s osami, pokud existují, intervaly, kde je funkce kladná, resp. záporná.

Vyšetřete spojitost funkce  $f$  a limity v krajních bodech – to už vám pomůže udělat si „odhad“ grafu.

Vypočítejte první derivaci, vyšetřete monotonii, lokální a globální extrémy funkce  $f$ .

Vypočítejte druhou derivaci. Najděte intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní.

Pokud má funkce  $f$  inflexní body, určete je.

Vyšetřete asymptoty funkce.

Načrtněte graf funkce  $f$ .